ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ - ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ (Γενικής Παιδείας)

2001

ΘΕΜΑ 1ο

A_1, A_2: Θεωρία

B_1: $\alpha \rightarrow \Lambda$, $\beta \rightarrow \Sigma$

B_2: β

B_3: $\alpha \rightarrow 2$, $\beta \rightarrow 5$, $\gamma \rightarrow 3$

ΘΕΜΑ 2ο

Α. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με

$f'(x) = -\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x$ και

$f''(x) = -\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x = -f(x)$

Β. Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι:

(ε): $y - f(0) = f'(0)(x-0)$, άρα $y = x+1$

Γ. Είναι $f'(\frac{\pi}{2}) = -1$ και $f(\frac{\pi}{2}) = 1$

με αντικατάσταση στη σχέση βρίσκουμε $\lambda = -4$

ΘΕΜΑ 3ο

Α. Είναι $f_3 = 2f_1 = 2F_1 = 0{,}4$, άρα

$F_3 = 0{,}9$ και φυσικά $F_4 = 1$

Β. Έχουμε $f_2 = 0{,}3$ και $f_4 = 0{,}1$, άρα

$\bar{x} = \sum_{i=1}^{4} x_i f_i = 64$

Γ. α. $P = F_2 = 0{,}5$

β. $P = f_2 + f_3 = 0{,}7$

ΘΕΜΑ 4ο

Α. Είναι $\bar{x} = \delta = 12$ και $\bar{x} - s = 10 \Leftrightarrow s = 2$

Β. $CV = \frac{s}{\bar{x}} = 0{,}166$, άρα όχι ομοιογενές

Γ. Στο διάστημα $(14, 16)$ αντιστοιχεί ποσοστό $13{,}5\%$

Άρα πλήθος μαθητών $\frac{13{,}5}{100} \cdot 4000 = 540$

Δ. Αν y_i είναι οι νέοι χρόνοι, τότε $y_i = x_i + 5$. Συνεπώς $\bar{y} = \bar{x} + 5 = 17$

και $s_y = s_x = 2$

Επομένως $CV_y = \frac{2}{17} = 0{,}117$

Συνεπώς ο CV μειώθηκε κατά $4{,}9\%$

2002

ΘΕΜΑ 1ο

Θεωρία

ΘΕΜΑ 2ο

α. Είναι $D_f = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$

β. Έχουμε $\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} \frac{2x}{x+1} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

γ. Η f είναι παραγωγίσιμη με
$f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$, $x \in D_f$

δ. Αν $(x_0, f(x_0))$ είναι το σημείο επαφής,
τότε $f'(x_0) = 2 \Leftrightarrow (x_0+1)^2 = 1 \Leftrightarrow$
$x_0 = 0$ ή $x_0 = -2$
Άρα τα σημεία επαφής είναι τα
$A(0, f(0)) = (0,0)$ και $B(-2, f(-2)) = (-2, 4)$
Οι αντίστοιχες εφαπτόμενες στα σημεία αυτά είναι:
$(\varepsilon_1): y = 2x$ και $(\varepsilon_2): y = 2x+8$

ΘΕΜΑ 3ο

α. Είναι $\bar{x} = 13$, $\delta = \frac{x_5 + x_6}{2} = 13,5$ και οι επικρατούσες τιμές είναι οι 13 και 14

β. Έχουμε $R = 18 - 8 = 10$ και $S = 3$, άρα
$CV = \frac{3}{13} \simeq 0,23$

γ. Αν y_i είναι οι νέες τιμές, τότε
$y_i = (1 - 0,1) x_i = 0,9 x_i$
Άρα $\bar{y} = 0,9 \bar{x}$ και $S_y = 0,9 S_x$
Συνεπώς $CV_y = \frac{S_y}{\bar{y}} = \frac{0,9 S_x}{0,9 \bar{x}} = \frac{S_x}{\bar{x}} = CV_x$,
δηλαδή ο CV, δεν μεταβάλλεται.

ΘΕΜΑ 4ο

α. Αν ισχύει $P(A \cap B) = P(A \cup B)$, τότε από την υπόθεση έχουμε
$P(A \cup B) - P(A \cap B) \neq 2P(A \cap B) \Leftrightarrow$
$P(A \cup B) \neq P(A \cap B)$, άτοπο

β. Έστω $P(A \cup B) = \kappa$ και $P(A \cap B) = \lambda$
Τότε είναι $\kappa \neq \lambda$ και επειδή $\lambda \leq \kappa$, προκύπτει $\lambda - \kappa < 0$.

Η συνάρτηση γράφεται:
$f(x) = (x-\kappa)^3 - (x-\lambda)^3$, άρα
$$f'(x) = 3(x-\kappa)^2 - 3(x-\lambda)^2 =$$
$$= 3(x-\kappa-x+\lambda)(x-\kappa+x-\lambda) =$$
$$= 3(\lambda-\kappa)(2x-\kappa-\lambda)$$

Είναι $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{κ+λ}{2}=x_0$

Από το πίνακα έχουμε ότι η f είναι γν. αύξουσα στο $(-\infty, x_0]$ και

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	Max	$\searrow$	

γν. φθίνουσα στο $[x_0,+\infty)$,

άρα παρουσιάζει μέγιστο στο σημείο

$$x_0=\frac{κ+λ}{2}=\frac{P(A\cup B)+P(A\cap B)}{2}=\frac{P(A)+P(B)}{2}$$

δ. Αφού είναι $P(A\cap B)=0$, θα έχουμε

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$

Έτσι η f γίνεται:

$$f(x)=(x-P(A)-P(B))^3-x^3$$

Άρα $f(P(A))=(-P(B))^3-(P(A))^3=-P^3(B)-P^3(A)$

Ομοίως $f(P(B))=-P^3(A)-P^3(B)$

2003

ΘΕΜΑ 1ο

Α, Β, Γ. : Θεωρία

Δ. α → Λ, β → Λ, γ → Σ, δ → Σ, ε → Λ

ΘΕΜΑ 2ο

Έστω τα ενδεχόμενα:

A: να είναι γυναίκα

B: να είναι φιλόλογος

Τότε δίνονται $P(A)=0,55$, $P(B)=0,40$ και $P(A\cap B)=0,30$

α. Είναι $P(A\cup B)=\dots=0,65$

β. $P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=0,25$

γ. $P(A'\cap B)=P(B-A)=0,10$

δ. $P(A'\cup B)=P[A'\cup (B')']=P[A\cap B']'=$

$=1-P(A\cap B')=1-0,25=0,75$

ΘΕΜΑ 3ο

Α. γ.

Β. Είναι $f'(x)=-\dfrac{x^2+1}{(x^2-1)^2}<0$, $x\in \mathbb{R}-\{-1,1\}$

Γ. Έχουμε

$$\lim_{x\to -1}\left((x+1)f(x)\right)=\lim_{x\to -1}\frac{x(x+1)}{x^2-1}=\lim_{x\to -1}\frac{x}{x-1}=\frac{1}{2}$$

Δ. Ισχύει $\varepsilon\varphi\omega=f'(0) \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega=-1 \Leftrightarrow \omega=\frac{3\pi}{4}$ rad

ΘΕΜΑ 4ο

α. Είναι $\bar{x}_A=5$, $\delta_A=\dfrac{x_3+x_4}{2}=4,5$

και $\bar{x}_B=8$, $\delta_B=6,5$

β. Υπολογίζουμε $S_A\simeq 2,77$ και $S_B\simeq 3,7$

Άρα $CV_A\simeq 0,554$ και $CV_B\simeq 0,462$

Συνεπώς η ομάδα Β΄ είναι πιο ομοιογενής

γ.

ομάδα Α	ομάδα Β
$y_i=1,2x_i$	$y_i=x_i+5$
άρα $\bar{y}=1,2\bar{x}_A=6$	άρα $\bar{y}=\bar{x}_B+5=13$

δ.

ομάδα Α	ομάδα Β
$S_y=1,2S_A$	$S_y=S_B=3,7$
άρα $CV_y=CV_A=0,554$	άρα $CV_y=0,28$

Συνεπώς παραμένει πιο ομοιογενής η ομάδα Β.

2004

ΘΕΜΑ 1ο

Α, Β : Θεωρία

Γ: α → Λ, β → Λ, γ → Σ

Δ: α → 4, β → 2, γ → 1

ΘΕΜΑ 2ο

Α. Πρέπει $x \geq 0$ και $\sqrt{x}-\sqrt{3} \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 3$

Άρα $D_f = [0,3) \cup (3,+\infty)$

Β. Έχουμε

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} \frac{x^2-4x+3}{\sqrt{x}-\sqrt{3}} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-1)(x-3)(\sqrt{x}+\sqrt{3})}{x-3}$$

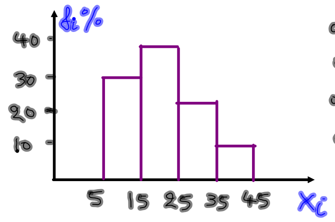
$$= \lim_{x\to 3} (x-1)(\sqrt{x}+\sqrt{3}) = 4\sqrt{3}$$

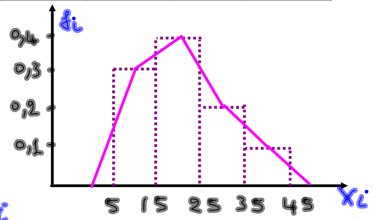
ΘΕΜΑ 3ο

Α.

Κλάσεις	x_i	ν_i	$f_i\%$	N_i	$F_i\%$	$\nu_i x_i$
[5,15)	10	60	30	60	30	600
[15,25)	20	76	38	136	68	1520
[25,35)	30	44	22	180	90	1320
[35,45)	40	20	10	200	100	600
////	///	200	100	////	///	4240

Β.





Γ. Συμπληρώνουμε τη στήλη $x_i\nu_i$ του πίνακα και βρίσκουμε $\bar{x} = \frac{4240}{200} = 21{,}2$

Δ. Το πλήθος αντιστοιχεί στις δύο πρώτες κλάσεις, άρα ισούται με $\nu_3+\nu_4 = 64$ (χιλιάδες οχήματα)

ΘΕΜΑ 4ο

Α. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $f'(x) = 6x^2-5x+1$, και ρίζες $\frac{1}{2}$ και $\frac{1}{3}$

Από τον πίνακα βλέπουμε ότι η f παρουσιάζει τ. μέγιστο στο $\frac{1}{3}$ και τ. ελάχιστο στο $\frac{1}{2}$.

x	$-\infty$		$1/3$		$1/2$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$		↗		↘		↗	
			Τ.μ.		Τ.ε.		

Άρα $P(A) = \frac{1}{2}$ και $P(B) = \frac{1}{3}$.

Β. i. $P(A\cap B) = \ldots\ldots = \frac{1}{6}$

ii. $P(A-B) = P(A) - P(A\cap B) = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

iii. $P((A\cap B)') = 1 - P(A\cap B) = \frac{5}{6}$

iv. $P[(A-B)\cup(B-A)] = P(A-B) + P(B-A) =$

$= P(A) + P(B) - 2P(A\cap B) = \frac{1}{2}$

☆2005☆

☆ΘΕΜΑ 1ο

Α, Β. : Θεωρία

Γ. α ⟶ Σ, β ⟶ Λ, γ ⟶ Λ, δ ⟶ Λ

☆ΘΕΜΑ 2ο

α.

κλάσεις	x_i	v_i	f_i	N_i	F_i	$v_i x_i$
[4,8)	6	5	10	5	10	30
[8,12)	10	10	20	15	30	100
[12,16)	14	25	50	40	80	350
[16,20)	18	10	20	50	100	180
/////	////	50	100	////	////	660

β. Συμπληρώνουμε τη στήλη $x_i v_i$ του πίνακα και βρίσκουμε $\bar{x} = \frac{660}{50} = 13,2$

γ. Το πλήθος των μαθητών αντιστοιχεί στην 1η κλάση και στο $\frac{1}{2}$ της 2ης κλάσης.
Άρα $v_1 + \frac{1}{2}v_2 = 10$ μαθητές.

☆ΘΕΜΑ 3ο

α. Είναι $k = \lim\limits_{x\to 5} \frac{3x-15}{x^2-6x+5} = \lim\limits_{x\to 5} \frac{3(x-5)}{(x-5)(x-1)} =$

$= \lim\limits_{x\to 5} \frac{3}{x-1} = \frac{3}{4}$

β. Άρα $X = \left\{\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right\}$

Επειδή $\frac{5}{4} > 1$ και $A \cap B \subseteq B$, θα είναι

$P(B) = \frac{3}{4}$ και $P(A \cap B) = \frac{1}{2}$

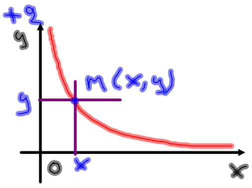
γ1. Δίνεται ότι $P(A \cup B) = \frac{7}{8}$, άρα εύκολα βρίσκουμε ότι $P(A) = \frac{5}{8}$

γ2. Είναι $P(A-B) = P(A) - P(A\cap B) = \frac{1}{8}$

☆ΘΕΜΑ 4ο

α. Είναι $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, $x>0$

Άρα $f'(1) = -1$ και $f(1) = 1$, άρα η εφαπτομένη της f στο $A(1,1)$ είναι
$(\varepsilon): y-1 = -1(x-1) \Leftrightarrow y = -x+2$



β. περίμετρος $\Pi = 2x + 2y =$

$= 2x + 2\cdot\frac{1}{x}$

Θεωρούμε (και μελετούμε) τη συνάρτηση

$\Pi(x) = 2x + \frac{2}{x}$, $x>0$

Είναι $\Pi'(x) = 2 - \frac{2}{x^2} = \frac{2(x^2-1)}{x^2}$, $x>0$

Η συνάρτηση παρουσιάζει ελάχιστο για $x=1$ (άρα $y=1$)
Άρα $M(1,1)$

x	0		1		$+\infty$
$\Pi'(x)$		$-$	0	$+$	
$\Pi(x)$		↘	min	↗	

γ. Είναι $y_i = -x_i + 2$

Άρα $\bar{y} = -\bar{x} + 2 = -3$ και $S_y = |-1| S_x = 2$

☺

☆ 2006 ☆

☆ ΘΕΜΑ 1ο

Α, Β: Θεωρία

Γ. α → Σ, β → Σ, γ → Λ, δ → Λ

☆ ΘΕΜΑ 2ο

α. Είναι $(a+4)+(5a+8)+4a+(a-1)+2a=50$,
από όπου βρίσκουμε $a=3$

β. Βρίσκουμε $\sum x_i v_i = 77$, άρα $\bar{x}=\frac{77}{50}=1,54$

γ. Είναι $\delta=\frac{x_{25}+x_{26}}{2}=\frac{1+1}{2}=1$

δ. Έχουμε $p=\frac{v_4+v_5}{v}=\frac{2+6}{50}=\frac{8}{50}$

☆ ΘΕΜΑ 3ο

α. Είναι $P(\text{αγόρι})=\frac{x}{x+(x+4)^2}=\frac{x}{x^2+9x+16}=f(x)$

β. $f(x)=\frac{1}{19} \iff x=2$ ή $x=8$

Για $x=8$, τα κορίτσια είναι $(8+4)^2=144$, άτοπο. Άρα $x=2$, οπότε τα κορίτσια είναι $(2+4)^2=36$, σύνολο 38.

Επομένως $P(\text{κορίτσι})=\frac{36}{38}=\frac{18}{19}$

γ. Είναι $f'(x)=\frac{16-x^2}{(x^2+9x+16)^2}$, με δεκτή ρίζα το 4

Η πιθανότητα μεγιστοποιείται όταν $x=4$ και η τιμή της πιθανότητας αυτής είναι $f(4)=\frac{1}{17}$.

x	0		4		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$		↗		↘	
			Max		

ΘΕΜΑ 4ο

α. Είναι $f'(x)=-4x+k+\frac{2}{\sqrt{x}}$, $x>0$

Πρέπει $f'(1)=0 \iff k=2$

β. Βρίσκουμε $\bar{x}=14$ και $s=2$

Τρεις παρατηρήσεις είναι $\leq 8=\bar{x}-3s$

Άρα $\frac{3}{v}=\frac{0,15}{100} \iff v=2000$.

(i) Στο διάστημα $(10,16)$ αντιστοιχεί ποσοστό $81,5\%$

Άρα το πλήθος των τιμών σε αυτό το διάστημα είναι $\frac{81,5}{100}\cdot 2000=1630$

(ii) Έχουμε $CV=\frac{s}{\bar{x}}=\frac{1}{7}>\frac{1}{10}$, άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

Αν σε κάθε τιμή προστεθεί μια σταθερά a, τότε ο νέος CV είναι:

$CV=\frac{s}{\bar{x}+a}=\frac{2}{14+a}$

Θέλουμε $CV\leq\frac{1}{10} \iff \frac{2}{14+a}\leq\frac{1}{10} \iff a\geq 6$

Άρα η μικρότερη τιμή του a είναι 6.

☺

☆ 2007 ☆

☆ ΘΕΜΑ 1ο

Α, Β, Γ2: Θεωρία

Γ1: α → Σ, β → Σ, γ → Λ

☆ ΘΕΜΑ 2ο

α. Έχουμε $f'(x) = (xe^x+3)' = e^x + xe^x =$

$= (xe^x+3)+(e^x-3) = f(x) + e^x - 3$

β. Είναι $\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)-e^x}{x^2-x} = \lim_{x\to 0}\frac{xe^x}{x(x-1)} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{x-1} = -1$

☆ ΘΕΜΑ 3ο

α. Αν $P(-1)=P(0)=P(1)=P(2)=x$, τότε $P(3)=P(4)=P(5)=\frac{x}{2}$.

Επειδή το άθροισμα όλων των πιθανοτήτων των απλών ενδεχομένων του Ω ισούται με 1, θα έχουμε:

$x+x+x+x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x=1 \Leftrightarrow x=\frac{2}{11}$

Άρα $P(-1)=P(0)=P(1)=P(2)=\frac{2}{11}$ και

$P(3)=P(4)=P(5)=\frac{1}{11}$

β. Επειδή $A\cap B=\{-1,3\}$ πρέπει $-1\in A$,

άρα $x^2-x-3=-1 \Leftrightarrow x=2$ ή $x=-1$

Για $x=2$, $A\cap B=\{2,0,-1,3\}$, άτοπο.

Άρα $x=-1$

γ. Για $x=-1$ είναι $A=\{1,3,-1\}$ και

$B=\{2,0,-1,3\}$, άρα:

$P(A)=P(1)+P(3)+P(-1)=\frac{5}{11}$

$P(B)=P(2)+P(0)+P(-1)+P(3)=\frac{7}{11}$

$P(A\cap B)=P(1)+P(3)=\frac{3}{11}$

$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=\frac{2}{11}$

$P(A\cup B')=P[(A')'\cup B']=P(A'\cap B)'=1-P(A'\cap B)$

$=1-P(B-A)=1-P(B)+P(B\cap A)=\frac{7}{11}$

☆ ΘΕΜΑ 4ο

α. Είναι $\bar{x}_A=\frac{12+18+t_3+t_4+\dots+t_{25}}{25}=\frac{30+345}{25}=15$

Ομοίως $\bar{x}_B=15$

β. Είναι

$$S_A^2=\frac{1}{25}\sum_{i=1}^{25}(t_i-\bar{x}_A)^2=$$

$$=\frac{1}{25}\left[(12-15)^2+(18-15)^2+\sum_{i=3}^{25}(t_i-\bar{x}_A)^2\right]$$

$$=\frac{18+X}{25}, \text{ όπου } X=\sum_{i=3}^{25}(t_i-\bar{x}_A)^2$$

Ομοίως βρίσκουμε

$$S_B^2 = \frac{2+x}{25}$$

Επομένως $S_A^2 - S_B^2 = \frac{18+x}{25} - \frac{2+x}{25} = \frac{16}{25}$

γ. Έχουμε $CV_A = \frac{1}{15} \Leftrightarrow \frac{S_A}{15} = \frac{1}{15} \Leftrightarrow S_A = 1$

Άρα από τη σχέση $S_A^2 - S_B^2 = \frac{16}{25}$ προκύπτει

$$1 - S_B^2 = \frac{16}{25} \Leftrightarrow S_B = \frac{3}{5}$$

Συνεπώς $CV_B = \frac{S_B}{15} = \frac{1}{25}$

2008

ΘΕΜΑ 1ο

Α, Β: Θεωρία

Γ. α → Λ, β → Λ, γ → Σ, δ → Σ, ε → Σ

ΘΕΜΑ 2ο

α. Έχουμε $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^x f(x)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{2}$

β. Είναι

$$f'(x)=\left(\frac{x-1}{e^x}\right)'=\frac{e^x-(x-1)e^x}{e^{2x}}=\frac{1-x+1}{e^x}=\frac{2-x}{e^x}$$

άρα $e^x f'(x)=2-x$

γ. Είναι $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=2$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	
			max		

Από τον πίνακα προκύπτει ότι η f παρουσιάζει μέγιστο το $\left(2, f(2)\right)=\left(2,\dfrac{1}{e^2}\right)$

ΘΕΜΑ 3ο

α. Βρίσκουμε $\bar{x}_A=\dfrac{110}{5}=22$ (χιλιάδες ώρες)

και $\bar{x}_B=\dfrac{120}{5}=24$ (χιλιάδες ώρες)

β. Το κριτήριο επιλογής είναι το κόστος ανά μονάδα χρόνου, π.χ. κόστος ανά 1000 ώρες.

Για την μπαταρία Α: $\dfrac{38}{22}\simeq 1{,}73$ €/1000h

» » Β: $\dfrac{40}{24}\simeq 1{,}67$ €/1000h

Έτσι επιλέγουμε τη μπαταρία Β.

γ. Είναι

$$S_A^2=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}\left(t_i-\bar{x}_A\right)^2=\frac{40}{5}=8. \text{ Άρα } S_A=2\sqrt{2}$$

και

$$S_B^2=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}\left(t_i-\bar{x}_B\right)^2=\frac{110}{5}=22. \text{ Άρα } S_B=\sqrt{22}$$

δ. Έχουμε $CV_A=\dfrac{S_A}{\bar{x}_A}=\dfrac{2\sqrt{2}}{22}=\dfrac{\sqrt{2}}{11}$

και $CV_B=\dfrac{S_B}{\bar{x}_B}=\dfrac{\sqrt{22}}{24}$

Επειδή $CV_A<CV_B \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{2}}{11}<\dfrac{\sqrt{22}}{24}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{2}{121}<\dfrac{22}{576}\Leftrightarrow\dfrac{1}{121}<\dfrac{11}{576}\Leftrightarrow 576<1331$,

οι μπαταρίες τύπου Α έχουν, ως προς τη διάρκεια ζωής τους, μεγαλύτερη ομοιογένεια.

ΘΕΜΑ 4ο

Θεωρούμε τα ενδεχόμενα:

A: Ένας κάτοικος να διαβάζει την εφημερίδα α

B: » » » β

Δίνονται: $P(A) = 0,50$ και $P(A-B) = 0,3$

α. $P(A' \cup B) = P(A' \cup (B')') = P(A \cap B')' =$

$= 1 - P(A-B) = 1 - 0,3 = 0,7$

β. Έχουμε $P(A-B) = P(A) - P(A \cap B)$.

Άρα $P(A \cap B) = 0,5 - 0,3 = 0,2 = \frac{1}{5}$

Ισχύει $A \cap B \subseteq B$, άρα $P(A \cap B) \le P(B) \Leftrightarrow$

$\frac{1}{5} \le P(B)$

και $B \subseteq A' \cup B$, άρα $P(B) \le P(A' \cup B) = 0,7$

γ. Έχουμε

$f'(x) = 3x^2 - x + P(B)$

Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι

$\Delta = 1 - 12P(B) < 0$, αφού $\frac{1}{5} \le P(B) \le \frac{7}{10}$

Επομένως $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

συνεπώς η f δεν παρουσιάζει ακρότατα.

☺

★2009★

★ΘΕΜΑ 1ο

Α,Β: Θεωρία

Γ: $\alpha \to Λ$, $\beta \to Σ$, $\gamma \to Λ$, $\delta \to Σ$, $\varepsilon \to Σ$

★ΘΕΜΑ 2ο

α. Έχουμε $\bar{x}=\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{4} x_i \nu_i \Leftrightarrow$

$$4=\frac{2\cdot 6+3\cdot \nu_2+5\cdot 3+8\cdot 4}{\nu_2+13} \Leftrightarrow \nu_2=7$$

β. Είναι $\nu=\nu_2+13=20$ και

$$S^2=\frac{1}{20}\sum_{i=1}^{4}(x_i-\bar{x})\nu_i=\frac{98}{20}=4,9$$

γ. Είναι $CV=\frac{S}{\bar{x}} \simeq \frac{2,2}{4}=0,55$

Συνεπώς το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

★ΘΕΜΑ 3ο

α. Είναι $f'(x)=3x^2-12x+\alpha$ και $f''(x)=6x-12$

Αντικαθιστώντας στη σχέση που μας δίνεται βρίσκουμε $\alpha=9$.

β. Έχουμε

$$\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-12x+9}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{3(x-1)(x-3)}{(x-1)(x+1)}=$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{3(x-3)}{x+1}=-3$$

γ. Αν $A(x_0,f(x_0))$ το σημείο επαφής, θέλουμε $f'(x_0)=-3 \Leftrightarrow (x-2)^2=0 \Leftrightarrow x_0=2$

Επομένως η εφαπτομένη θα έχει εξίσωση $y-f(2)=f'(2)(x-2) \Leftrightarrow y=-3x+1$.

★ΘΕΜΑ 4ο

Α.α. Είναι $f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2}=\frac{2-x}{2x}$, με $x>0$ και ρίζα το $x=2$

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	max	$\searrow$	

Από τον πίνακα προκύπτει ότι η f είναι γν. αύξουσα στο $(0,2]$ και γν. φθίνουσα στο $[2,+\infty)$

β. Η f παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0=2$, με τιμή $f(2)=\ln 2+\lambda^2-6\lambda+1$.

Β.α. Είναι $2<3<4<5<8$ και η f είναι γν. φθίνουσα στο $[2,+\infty)$, άρα

$f(8)<f(5)<f(4)<f(3)<f(2)$.

Συνεπώς $\delta=f(4)=\ln 4+\lambda^2-6\lambda$ και

$R=f(2)-f(8)=3-\ln\frac{1}{4}$

β. Είναι $R+\delta<-2 \Leftrightarrow \lambda^2-6\lambda+5<0 \Leftrightarrow 1<\lambda<5$

Άρα $A=\{2,3,4\}$, επομένως

$$P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{3}{100}$$

☆2010☆

☆ΘΕΜΑ Α

A_1, A_2, A_3: Θεωρία

A_4: α → Σ, β → Λ, γ → Σ, δ → Λ, ε → Λ

☆ΘΕΜΑ Β

B_1. Έχουμε $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2\left(\sqrt{x^2-x+1}-1\right)}{x-1} =$

$= 2\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-x+1-1}{(x-1)\left(\sqrt{x^2-x+1}+1\right)} =$

$= 2\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x(x-1)}{(x-1)\left(\sqrt{x^2-x+1}+1\right)} =$

$= 2\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x}{\sqrt{x^2-x+1}+1} = 2\cdot\dfrac{1}{2} = 1$

B_2. Η f έχει παράγωγο $f'(x) = \dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2-x+1}}$

Άρα $\lambda = f'(0) = -1$

B_3. Θέλουμε $\varepsilon\varphi\omega = -1 \Leftrightarrow \omega = \dfrac{3\pi}{4}$ rad

☆ΘΕΜΑ Γ

Γ_1. Η δεύτερη κλάση είναι της μορφής $[c, 2c)$, με κέντρο $\dfrac{c+2c}{2} = \dfrac{3c}{2}$.

Άρα $\dfrac{3c}{2} = 6 \Leftrightarrow c = 4$

Γ_2. Συμπληρώνουμε τον πίνακα:

κλάσεις	x_i	v_i	$x_i v_i$	$x_i^2 v_i$
[0,4)	2	20	40	80
[4,8)	6	40	240	1440
[8,12)	10	45	450	4500
[12,16)	14	30	420	5880
[16,20)	18	25	450	8100
/////	/////	160	1600	20000

Από τον πίνακα έχουμε $\bar{x} = \dfrac{1600}{160} = 10$

και $S^2 = \dfrac{20000}{160} - 10^2 = 25$, άρα $S = 5$

Γ_3. Είναι $CV = \dfrac{S}{\bar{x}} = \dfrac{1}{2} > 0{,}10$, άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

Γ_4. Είναι $N(A) = \frac{1}{4}v_2 + v_3 + \frac{1}{2}v_4 = 70$

Άρα $p = \dfrac{70}{160} = \dfrac{7}{16}$

☆ΘΕΜΑ Δ

Δ_1. Είναι $f'(x) = \dfrac{1-(x-P(A))^2}{x-P(A)} =$

$= \dfrac{(-x+1+P(A))(x+1-P(A))}{x-P(A)}$, $x > P(A)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 + P(A) = x_0$ ή $x = P(A) - 1 < P(A)$, απορρίπτεται.

x	$P(A)$		x_0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	max	$\searrow$	

Η f είναι γν. αύξουσα στο $(P(A),\ P(A)+1]$ και γν. φθίνουσα στο $[P(A)+1, +\infty)$

Παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0 = P(A)+1$ με τιμή $f(x_0) = -\frac{1}{2} + P(B)$.

Δ2. Είναι $P(A)+1 = \frac{5}{3} \Leftrightarrow P(A) = \frac{2}{3}$ και

$$-\frac{1}{2} + P(B) = 0 \Leftrightarrow P(B) = \frac{1}{2}$$

Δ3. Έχουμε $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = \frac{1}{3}$, άρα $P(A \cap B)' = \frac{2}{3}$

Δ4. Είναι $P[(A-B) \cup (B-A)] =$

$$= P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) = \frac{1}{2}$$

☆2011☆

☆ΘΕΜΑ Α

A_1, A_2, A_3: Θεωρία

A_4. $\alpha \to Λ$, $\beta \to Λ$, $\gamma \to Σ$, $\delta \to Λ$, $\varepsilon \to Σ$

☆ΘΕΜΑ Β

B_1. Είναι $P(M)=\frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{N(M)}{N(\Omega)}=\frac{1}{4} \Leftrightarrow$
$N(\Omega)=4N(M)$, δηλαδή $N(\Omega)=$ πολ/σιο του 4
και επειδή $64<N(\Omega)<72$, θα είναι
$N(\Omega)=68 \ (=4\cdot 17)$

B_2. Ισχύει $P(A)+P(K)+P(M)=1 \Leftrightarrow$
$5\lambda^2-5\lambda+1=0 \Leftrightarrow \lambda=1$ ή $\lambda=\frac{1}{4}$

• Αν $\lambda=1$, τότε $P(A)=4$, άτοπο,
άρα $\lambda=\frac{1}{4}$, οπότε $P(A)=\frac{1}{4}$ και $P(K)=\frac{1}{2}$

B_3. $N(A)=P(A)\cdot N(\Omega)=\frac{1}{4}\cdot 68=17$

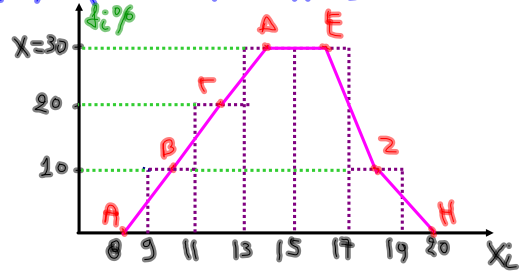
$N(M)=17$ και $N(K)=34$.

B_4. Είναι $P(A\cup M)=P(A)+P(M)=\frac{1}{2}$

☆ΘΕΜΑ Γ

Γ_1. Είναι $y_\Delta=y_E=x$, οπότε από τον τύπο
$\bar{x}=\sum_{i=1}^{5} f_i x_i$, προκύπτει $x=30$

Γ_2.



Γ_3.

κλάσεις	x_i	$f_i\%$
[9,11)	10	10
[11,13)	12	20
[13,15)	14	30
[15,17)	16	30
[17,19)	18	10
////	////	100

Γ_4. Το επιπλέον ποσό αντιστοιχεί στις
κλάσεις [15,17) και [17,19)
Άρα το ποσοστό είναι $30+10=40\%$

Γ_5. Είναι $v=80$, άρα ο αριθμός των
πωλητών είναι $\frac{40}{100}\cdot 80=32$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η f έχει παράγωγο

$$f'(x)=f(x)\cdot\left(x^2-\frac{11}{15}x+\frac{2}{15}\right),$$ με ρίζες της παραγώγου $\frac{1}{3}$ και $\frac{2}{5}$

Άρα η f είναι γν. αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα

$\left(-\infty,\frac{1}{3}\right]$ και $\left[\frac{2}{5},+\infty\right)$

x	$-\infty$		$1/3$		$2/5$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

και γν. φθίνουσα στο διάστημα $\left[\frac{1}{3},\frac{2}{5}\right]$

Δ2. Επειδή $A\subseteq B$, είναι $P(A)\le P(B)$

Άρα $P(A)=\frac{1}{3}$ και $P(B)=\frac{2}{5}$

- $P(A\cap B)=P(A)=\frac{1}{3}$
- $P(A\cup B)=P(B)=\frac{2}{5}$
- $P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=0$
- $P(B-A)=P(B)-P(A\cap B)=\frac{1}{15}$

Δ3. α. Έχουμε $f(x)=h(x)\Leftrightarrow$

$$\frac{1}{3}x\left(x^2-\frac{11}{10}x+\frac{2}{5}\right)=\frac{1}{5}x\left(\frac{3x^2}{2}-x-\frac{1}{3}\right)\Leftrightarrow$$

$$x(x^2-5x+6)=0\Leftrightarrow x\in\{0,2,3\}$$

β. Είναι $x_1=0$, $x_2=2$, $x_3=3$ και

$\nu_1=1$, $\nu_2=5$, $\nu_3=7$

Άρα $\bar{x}=\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{3}\nu_i x_i=\frac{31}{13}$